

מכניקה 90903

פרק 17 - כבידה וכוח מרכזי

תוכן העניינים

1. תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד
2. חוקי קפלר
3. תרגילים נוספים

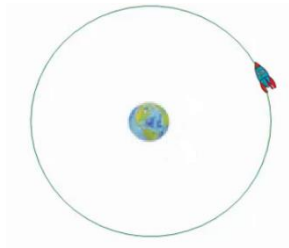
תנועה תחת כוח מרכזי וכוח הכובד:

שאלות:



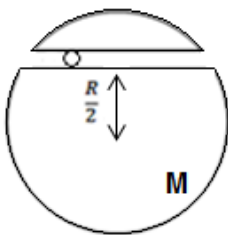
(1) טיל יוצא מכדה"א וחוזר

- טיל נורה מכדור הארץ.
הטיל מתרחק מכדור הארץ וחוזר אליו בחזרה.
נתון שבאיזושהי נקודה במסלול המרחק של הטיל מכדה"א הוא R_1 .
נתונה הזווית בין R_1 למהירות באותו הרגע v_1 היא 30 מעלות.
רדיוס כדה"א הוא R_E וזווית הפגיעה של הטיל בכדה"א היא θ .
א. מצא את: v_0, v_1, v_2, θ_0 . (מהירות פגיעת הטיל בכדה"א).
ב. חשב את: $R_{\max}$ (המרחק המקסימלי של הטיל מכדה"א).
ו- $v_{\min}$ (המהירות באותה נקודה).



(2) חלק עף במהירות מילוט

- חללית בעלת מסה m סובבת את כדה"א במסלול מעגלי ברדיוס R .
ברגע מסוים החללית מתפצלת לשני חלקים.
אחד החלקים בעל מסה של שליש m עף בכיוון הרדיאלי במהירות המילוט.
מצא את הרדיוס המינימלי והמקסימלי של החלק השני.



(3) גוף זז במנהרה במרחק מהמרכז

- גוף נע במנהרה הנמצאת במרחק $\frac{R}{2}$ ממרכז כדור בעל מסה M .
הגוף מתחיל ממנוחה בקצה המנהרה ואין חיכוך.
מצא את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

תשובות סופיות:

(1) ראה סרטון.

(2) ראה סרטון.

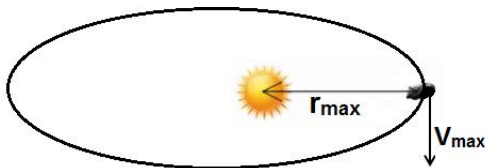
$$x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} R \cos\left(\sqrt{\frac{GM}{R^3}} t\right) \quad (3)$$

חוקי קפלר:

שאלות:

(1) מציאת זמן מחזור

גוף נע סביב השמש במסלול אליפטי כך שמהירותו המקסימאלית ומרחקו המינימלי מהשמש נתונים. נתון גם שטח האליפסה שעושה הגוף. מצא את זמן המחזור של הגוף.

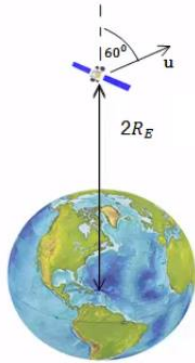


תשובות סופיות:

$$T = \left(\frac{r_{\min} v_{\max}}{2S} \right)^{-1} \quad (1)$$

תרגילים נוספים:

שאלות:



1) לוויין נכנס למסלול אליפטי

- לוויין נורה אנכית מפני כדה"א.
 הלוויין מגיע לשיא גובה של $2R_E$.
 ברגע זה ניתנת לו מהירות בכיוון 60° מעלות עם האנך
 לכדור הארץ שגודלה u .
 (התעלם מסיבוב ותנועת כדור הארץ).
 א. מצא תנאי על המהירות u כך שהלוויין ישאר במסלול סגור.
 ב. מצא תנאי נוסף על u כך שהלוויין לא יפגע בכדור הארץ.

2) יקום דו מימדי

ביקום דו מימדי פועל כוח שמרכזו בנקודה (x_0, y_0)

וגודלו: $\frac{k}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^{\frac{3}{4}}}$. כיוון הכוח הוא תמיד לכיוון מרכזו.

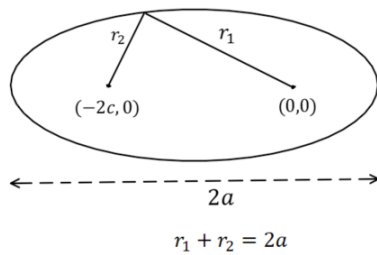
א. האם הכוח הוא כוח משמר? אם כן, מצא את האנרגיה הפוטנציאלית של הכוח.

חשב את העבודה שמבצע הכוח על מסה M אשר נעה בין הנקודה (x_1, y_1) לבין הנקודה (x_2, y_2) .

ב. מסה M נמצאת במיקום (Bx_0, By_0) ויש לה מהירות: $\vec{v} = A(\hat{x} + \hat{y})$.
 מה תהיה מהירות המסה כשהמרחק בינה לבין מרכז הכוח יהיה d ?
 (A, B, d גדולים מאפס).

ג. מסה M נמצאת במרחק r_1 ממרכז הכוח.
 למסה מהירות v_1 וידוע שהמסה נמצאת בשיווי משקל בכל זמן.
 מצא קשר בין v_1 לבין r_1 .

ד. פצצה בעלת מסה M מסתובבת סביב מרכז הכוח וברגע שגודל המהירות שלה הוא v_2 והמרחק שלה הוא r_2 , כיוון המהירות מאונך לכיוון המיקום שלה ביחס למרכז הכוח. באותו הרגע הפצצה מתפוצצת לשני חלקים אחד בגודל m והשני בגודל $M-m$.
 החלק $M-m$ ממשיך באותו כיוון מהירות כמו לפני הפיצוץ.
 מה צריכה להיות מהירות החלק m על מנת שהחלק $M-m$ יהיה במרחק קבוע ממרכז הכוח לאחר הפיצוץ והלאה?



(3) פיתוח משוואת האליפסה

באליפסה סכום המרחקים של כל נקודה משני המוקדים של האליפסה הוא קבוע ושווה ל- $2a$ (רוחב האליפסה). נתונה אליפסה שהמוקדים שלה נמצאים בנקודות $(0,0)$ ו- $(-2c,0)$.

הראו כי משוואת האליפסה היא: $r(\theta) = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ כאשר $\varepsilon = \frac{c}{a}$

$$r_0 = \frac{(a^2 - c^2)}{a}$$

תשובות סופיות:

$$(1) \quad \text{א. } |u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}} \quad \text{ב. } \sqrt{\frac{GM}{2R_E}} < |u| < \sqrt{\frac{GM}{R_E}}$$

$$(2) \quad \text{א. משמר, } U(r') = -2kr'^{-\frac{1}{2}}, \text{ כאשר } r' = \left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$W = 2k \left[\left((x_2-x_0)^2 + (y_2-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}} - \left((x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2\right)^{-\frac{1}{4}} \right]$$

$$\text{ג. } v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} \quad \text{ב. } v = \left(2A^2 - \frac{4k}{m} \left[d^{-\frac{1}{2}} - (B-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x_0^2 + y_0^2)^{-\frac{1}{4}} \right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ד. אחורה } u_2 = \frac{1}{m}(M-m) \sqrt{\frac{k}{m}} r_1^{-\frac{1}{4}} - \frac{M}{m} v_1$$

(3) הוכחה.